数理解析研究所講究録
631巻 1987年 1-7

リーマン多様体のスペクトル

ー問題と展望ー

名古屋大学　理学部　砂田利一
(Toshikazu Sunada)

コンパクトなリーマン多様体上の関数に作用するラプラシアンのスペクトルについては、既に数多くの研究が成され、その方法についても確立されていることが多い。しかし非コンパクトな場合には、スペクトルの構造に多種多様な現象が現れて、一般論を構成するには複雑を極め、この意味で未開拓な研究分野と言ってよいであろう（［１］［２］［３］）。ここでは、あるクラスに属する非コンパクトな多様体に考察を限定し、未解決な問題をいくつか提示してこの方面の研究の刺激を促そうと思う。

リーマン多様体Xは、もしXに不連続に作用する等距離変換群Γが存在し、商空間Γ＼Xがコンパクトになるとき、コンパクト商を持つ多様体と呼ぶ。代表的な例は、あるコンパクトなリーマン多様体Mの被覆多様体

$$X \rightarrow M$$

となっているものである。ここでX上の計量は被覆写像によ

るリフトとする。特に、ユークリッド空間や非コンパクト型の対称空間はこのクラスに属する。

コンパクト商を持つリーマン多様体は、完備である。従って、定義域として$C_0^\infty(X)$を持つラプラシアンΔは一意的な自己共役拡張

$$\Delta : L^2(X) \to L^2(X)$$

を持つ。

念のため、スペクトラムの定義を復習しておこう。Δのスペクトラムは実数の集合$\sigma(\Delta)$で、次の二つの部分に分かれる。点スペクトラム$\sigma_p(\Delta)$はΔの固有値からなり、連続スペクトラム$\sigma_c(\Delta)$は実数λで$(\Delta-\lambda I)^{-1}$が存在するが非有界となるものからなる。

自己共役作用素の一般論から、$\sigma(\Delta)$は閉集合であり、スペクトルの底

$$\lambda_0(\Delta) = \inf \sigma(\Delta)$$

は非負な数である。

Xがコンパクトなとき、$\sigma(\Delta)$が重複度有限な固有値のみからなることが知られている。我々の関心は、非コンパクトなXに対する$\sigma(\Delta)$の構造である。以下Xは、コンパクト商を持つ非コンパクトなリーマン多様体を表すものとする。

例。 Xがユークリッド空間もしくは非コンパクト型対称空間のとき、 $\sigma(\Delta)=\sigma_c(\Delta)=[\lambda, \infty)$ 、 $\lambda \geqq 0$ となる。

この例から、 次の問題が直ちに考えられる。

問題A　　Δ のスペクトラムの中で、 連続スペクトラムの部分がどの程度大きいであろうか?　例えば連続スペクトラムは非有界な集合か?

この問題に対する答えは、 殆ど知られていない。 簡単な考察により、 $\sigma_c(\Delta)$ が空でないことは分かる。 実際

命題1　スペクトルの底 $\lambda_0(\Delta)$ は連続スペクトラムに属する。

この命題の証明には、 一般のリーマン多様体に対して成立するPerron-Frobenius型の定理

「もし $\lambda_0(\Delta)$ が固有値ならば、 その重複度は一である」

および後に述べる命題4を適用すればよい。

問題B　$\sigma(\Delta)$は、端点が集積点を持たない互いに交わらない閉区間の和集合か?

この問題は、ある意味でHillの作用素

$$-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\ , \qquad q(x+1)=q(x)$$

について知られている古典的結果を踏まえている。

命題2　もしXがあるコンパクトな多様体のアーベル被覆なら、問題Bの答えはYesである。

命題3　上記の命題の仮定のもと、ある正の数αが存在して、区間$[0,\alpha]$はΔの連続スペクトラムに含まれ、しかも固有値を含まない。

上記の二命題の証明には、Hilbert空間$L^2(X)$のアーベル群Γの指標群上の直積分分解

$$L^2(X)=\int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} L^2(E_\chi)\,d\chi$$

を利用する。ここで$d\chi$はHaar測度を表し、$L^2(E_\chi)$は指標χに付随する直線束の自乗可積分な切断からなるHilbert空間である。

固有値については次のP. Sarnakの結果が知られている。

命題4　もし固有値が存在すれば、その重複度は常に無限である。

固有値の存在するXの例は、小野薫氏により与えられた。特に彼は、基本群が自由アーベル群であるコンパクトな多様体の普遍被覆多様体で固有値の存在する例を作っている。

もう一つの例は群多様体で与えられる。例えば、XとしてSL(2, R)を考える。これはPoincareの上半平面の単位球接束と同一視されるが、自然な計量（左不変）に関して、Δのスペクトルは次のように与えられる。

$$\sigma_c(\Delta) = [\tfrac{1}{4}, \infty)$$

$$\sigma_p(\Delta) = \{ \tfrac{1}{4}(n^2+4mn+2m^2+1);\ n=1,2,3,\cdots,\ m=1,3,5\cdots \}$$

実はもっと一般に、疎系列に属するユニタリ表現を持つ半単純リー群に適当な左不変計量を導入することにより、固有値を持つ例が構成される（小林俊行氏による）。

問題C　単連結なXが非負曲率の計量を持つとき、Δは固有値を持たないことを示せ。もっと一般に、単連結なXが自明でない閉測地線を持たないとき、同様なことを示せ。

この問題において、もしコンパクト商を持つという条件をはずせば、スペクトラムが有限重複度を持つ固有値のみからなる例が存在する（［２］）。

いずれにしても固有値の存在するような多様体は特別の性質を満たしているように思われる。

References

1. A.Baider, Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra, J.Diff.Geom. 14(1979), 41-57.
2. H.Donnelly and P.Li, Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds, Duke Math.J. 46(1979),497-503.
3. L.Karp, Noncompact Riemannian manifolds with pure continuous spectrum, Michigan Math.J. 31(1984), 339-347.
4. A.Katsuda and T.Sunada, Homology and closed

geodesics in a compact Riemann surface, to appear in Amer. J. Math.

5. K. Ono, The scalar curvature and the spectrum of spin manifolds, preprint.

6. K. Ono, T. Kobayashi and T. Sunada, Spectrum of the Laplacian on a non-compact Riemannian manifold with compact quotient, preprint.

7. D. Sullivan, Related aspect of positivity in Riemannian geometry, J. Diff. Geom. 25(1987), 327-351.

8. T. Sunada, Unitary representations of fundamental groups and the spectrum of twisted Laplacians, preprint.